ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям заключительного этапа
9-11 класс
Вариант 1

Задание №1

Так как $12\sqrt{5} > 12 \cdot 2{,}25 = 27$, то $\left|12\sqrt{5} - 29\right| = 29 - 12\sqrt{5}$. Обозначим исходное выражение через x. Очевидно $x < 0$. Возводя x в квадрат, получим

$$x^2 = 29 - 12\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + 29 - 2\sqrt{29^2 - (12\sqrt{5})^2} = 58 - 2\sqrt{841 - 720} = 58 - 2\cdot 11 = 36$$

Так как $x < 0$, то $x = -6$.

Ответ: $\{-6\}$

Задание №2

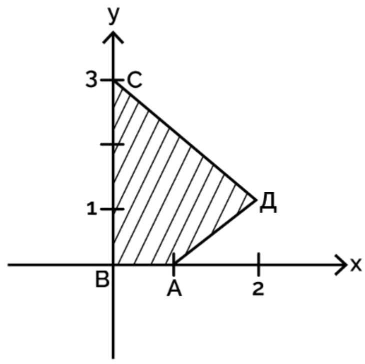
Пусть скорости бегунов v_1, v_2, v_3 (кругов в минуту). Тогда по условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \dfrac{1}{5} \\ v_2 - v_3 = \dfrac{1}{7} \end{cases}$$

Отсюда: $v_1 - v_3 = v_1 - v_2 + v_2 - v_3 = \frac{12}{35}$ мин. А тогда искомая величина $\frac{v_1}{v_1 - v_3} = \frac{35}{12}$

Ответ: $\left\{\frac{35}{12} \text{ мин}\right\}$

Задание №3



Так как фигура симметрична относительно x и y, то достаточно нарисовать ее и вычислить площадь в первом квадранте т.е. при $x \geq 0, y \geq 0$. В этом случае получаем:

$$(x + |y - 1| - 1)^2 \leq 1 <=> 0 \leq x + |y - 1| \leq 2$$

Указанная область имеет вид ABCD (площадь треугольника плюс площадь трапеции). Отсюда находим:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2}(1 + 2) = 3{,}5$$

А тогда площадь всей фигуры равна $4 \cdot 3{,}5 = 14$

Ответ: $\{14\}$

Задание №4

Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то ОДЗ $\sin 2x \neq 0, \sin 3x \neq 0$. Обозначим: $\mathrm{ctg} x = a$, $\mathrm{ctg} 2x = b$, $ctg 3x = c$. Тогда в этих обозначениях имеем: $\mathrm{a}^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$. Преобразуя, получаем:

$$\mathrm{a}^3 + b^3 + c^3 = (a + b)^3 + 3c(a + b)^2 + 3(a + b)c^2 + c^3$$

Далее: $a^2b + ab^2 + a^2c + 2abc + b^2c + ac^2 + 3bc^2 = 0$

$$<=> (a + b)(b + c)(a + c) = 0$$

Поэтому $\left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{array}\right. <=> \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \sin 5x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right. <=> \begin{array}{l} \sin 4x = 0 \\ \sin 5x = 0 \end{array}$ или

Так как $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$, то отсюда $\cos 2x = 0$ ($\sin 2x \neq 0$ по ОДЗ).

Значит $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\ k \in Z$. Если $\sin 5x = 0$, то $x = \frac{\pi m}{5}, m \in Z, m \neq 5s$

Ответ: $\left\{x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\ k \in Z,\ x = \frac{\pi m}{5}, m \in Z, m \neq 5s, s = \pm 0, \pm 1, \dots \right\}$

Задание №5

Полагаем в равенстве $x = 2$. Получим:

$$f(2) + 3f(0) = 10$$

При $x = 1$ имеем:

$$f(1) - f(1) + 3f(0) = 3 => f(0) = 1.$$

При $x = 0$ имеем:

$$f(0) - 2f(1) + 3f(0) = 2 => f(1) = 1$$

А тогда:

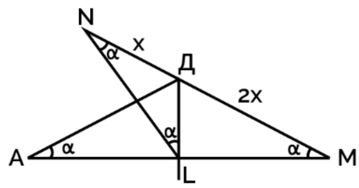
$$f(x) + x - 2 + 3 = x^3 + 2$$

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

Ответ: $x^3 - x + 1$

Задание №6

Сделаем чертеж. Обозначим DN=*x,* тогда DM=*2x, DL=x,*
а ∠ADM=∠NDL (угол поворота)/



Тогда в равнобедренных △NDL и △ADM имеем равенство углов

$$\angle M = \angle A = \angle DLN = \angle N = \alpha$$

Поэтому △NLM также равнобедренный.

Из подобия △NDL ~ △ ADM с коэффициентом $\frac{1}{2}$ и равенства NL=LM имеем AM=2NL=2LM. Поэтому DL – медиана и высота в △ ADM. Поскольку ∠LDM=2α как внешний угол △ LDN, то из прямоугольного △ LDM имеем 3α=90°=> $\alpha = 30°$

Ответ: $\{30°, 30°, 120°\}$

Задание №7

Обозначим $z = 2y - x$, отсюда $2y = z + x$. Подставляя в неравенство получим, $z + x - 5x \geq 4x^2 + 5$; $4x^2 + 4x + 5 - z \leq 0$, $x^2 + x + \frac{5-z}{4} \leq 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-5+z}}{2}$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{z-4}}{2}$. Тогда $z \geq 4$.

Следовательно $\min z = 4$

Ответ: $\{4\}$

Задание №8

Приведем систему к виду:

$$\begin{cases} x^3 - 4x > 3y^2 - 18y + 26 \\ x^3 - 4x < -y^2 + 8y - 14 \end{cases}$$

Отсюда по свойству транзитивности следует, что

$$3y^2 - 18y + 26 < -y^2 + 8y - 14$$

$$\text{т.е. } 4y^2 - 26y + 40 < 0, 2y^2 - 13y + 20 < 0,$$

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4}, \frac{5}{2} < y < 4$$

Так как *y* – целое, то *y=3.* Подставляя *y=3* в исходную систему,

получим:

$$\begin{cases} x^3 - 4x > -1 \\ x^3 - 4x < 1 \end{cases}$$

но тогда в силу целостности

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x \pm 2 , 0$$

Ответ: $(x, y) \in \{(-2,3), (2,3), (0,3)\}$

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД

Краткие решения к заданиям заключительного этапа

9-11 класс

Вариант 2

Задание №1

Пусть $a = \sqrt{1{,}5} + \sqrt{7{,}5}$. Тогда

$a^2 = 1.5 + \ 7{,}5 + 2\sqrt{1.5 \cdot 7{,}5} = 9 + 2 \cdot \ 1{,}5\sqrt{5} = 9 + 3\sqrt{5} = 9 + \sqrt{45}.$

Поэтому:

$$\sqrt{9 + \sqrt{45}} - \sqrt{1{,}5} - \sqrt{7{,}5} = 0.$$

Следовательно, данное выражение равно 1

Ответ: $\{1\}$

Задание №2

Пусть скорости бегунов v_1, v_2, v_3 (кругов в минуту). Тогда по условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \dfrac{1}{3} \\ v_1 - v_3 = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Отсюда: $v_2 - v_3 = \frac{4}{15}$. А тогда искомая величина равна

$$\frac{1}{4/15} = \frac{15}{4}$$

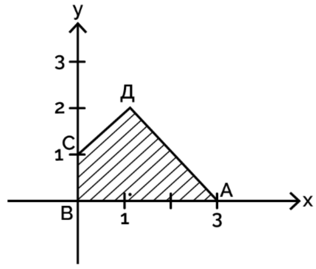
Ответ: $\frac{15}{4}$ мин

Задание №3

Так как фигура симметрична относительно x и y, то достаточно нарисовать ее и вычислить площадь в первом квадранте т.е. при $x \geq 0, y \geq 0$. В этом случае получаем:

$$(y + |x - 1| - 1)^2 \leq 1 \leq> -1 \leq y - 1 + |x - 1| \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 2 - |x - 1|$$



Нарисовав эту область на плоскости, получим ABCD

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2}(1 + 2) = 3{,}5$$

А тогда площадь всей фигуры равна $4 \cdot 3{,}5 = 14$

Ответ: $\{14\}$

Задание №4

Обозначим $a = \cos x \;\; b = \cos 2x, c = \cos 3x$

Получим:

$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 <=> a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)c^2 + c^3 + 3(a + b)^2 c$.

Преобразуя, это равенство, получим:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)[(a + b)^2 + 3c(a + b) + 3c^2]$$

Отсюда:

$$(a + b)(b + c)(a + c) = 0$$

Поэтому

$$\left[\begin{array}{l} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{c} \cos x + \cos 2x = 0 \\ \cos 2x + \cos 3x = 0 \\ \cos x + \cos 3x = 0 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0 \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos\frac{5x}{2} = 0 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n \\ x = \frac{\pi + 2\pi m}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi s}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi l}{5} \end{array}\right.$$

$n, m, k, l \in Z$

Ответ: $\left\{\pi + 2\pi n, \frac{\pi + 2\pi m}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi s}{2}, \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi l}{5}\right\}$

Задание №5

Подставляя $x = 0,1,2 \ldots 2001$ в равенство $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$

С учетом $f(0) = 0$,

Получаем:

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 + 1$$

$$f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 + 1$$

…………………………......

$$f(2000) = f(1999) + 2 \cdot 1999 + 1$$

$$f(2001) = f(2000) + 2 \cdot 2000 + 1$$

Складывая эти равенства получаем:

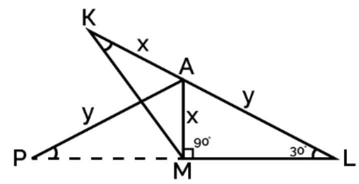
$$f(2001) = 2(1 + 2 + \cdots + 1999 + 2000) + 1 \cdot 2001 = (1 + 2000) \cdot 2000 + 2001 = 2001^2$$

Ответ: 2001^2

Задание №6

Сделаем рисунок. По условиям задачи

AP=AL, AM=AK ∠KAM=∠PAL=120°



Нужно найти:

$$\frac{S \bigtriangleup \mathrm{KLM}}{S \bigtriangleup \mathrm{PAL}}$$

Решение:

Имеем: ∠K=∠L=∠M=30° Обозначим KA=x, AL=y. Так как △ KLM подобен △ PAL, то отношение площадей этих треугольников равно квадрату отношения сходственных сторон. По теореме косинусов находим, что $\mathrm{PL}^2 = 3y^2$. Далее $x = \frac{y}{2}$, значит $KL = \frac{3y}{2}$. Поэтому искомое отношение будет равно:

$$\frac{\frac{9y^2}{4}}{3y^2} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\{3: 4\}$

Задание №7

Обозначим $3y-2x=z$. Нужно найти $\min z$ при условии, что $3y+2x \geq x^2+5$. Подставляя в неравенство получим,

$$z+2x+2x \geq x^2+5;\ x^2-4x+5-z \leq 0.$$

Отсюда, решая это кв. неравенство, получим

$$x=2 \pm \sqrt{4+z-5}=2 \pm \sqrt{z-1}.$$

Поэтому $\min z=1$. Это возможно, если $x=2, y=\frac{5}{3}$

Ответ: $\{1\}$

Задание №8

Приведем систему к виду:

$$\begin{cases} y^3-y>3x^2-18x+26 \\ y^3-y<-x^2+8x-14 \end{cases}$$

По свойству транзитивности, отсюда следует, что

$$3x^2-18x+26<-x^2+8x-14$$

тогда имеем:

$$4x^2-26x+40<0, \text{т. е. } 2x^2-13x+20<0$$

$$x=\frac{13 \pm \sqrt{169-160}}{4}=\frac{13 \pm 3}{4}$$

$$x_1=\frac{5}{2}, x_2=4$$

Тогда:

$$\frac{5}{2}<x<4$$

Так как x целое число, то находим, что $x=3$. Подставляя $x=3$

в исходную систему, получим:

$$\begin{cases} y^3-y>-1 \\ y^3-y<1 \end{cases} -1<y^3-y<1$$

По условию целочисленное, поэтому:

$y^3-y=0\ \ y(y^2-1)=0 \Rightarrow y=0, \qquad y=1, \qquad y=-1$

Ответ: $(x,y) \in \{(3,0),(3,-1),(3,1)\}$

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям заключительного этапа
9-11 класс
Вариант 3

Задание №1

Так как $\sqrt{2} < 1{,}42$, то

$$40 \cdot 1{,}42 = 56{,}8 < 57$$

Поэтому:

$$\left|40\sqrt{2} - 57\right| = 57 - 40\sqrt{2}$$

Обозначим:

$$\sqrt{57 - 40\sqrt{2}} - \sqrt{57 + 40\sqrt{2}} = \alpha$$

$\alpha < 0$. Тогда

$$a^2 = 57 - 40\sqrt{2} + 57 + 40\sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{57^2 - 3200} = 114 - 14 = 100$$

Но $\alpha < 0$, поэтому

Ответ: $\{-10\}$

Задание №2

Пусть скорости бегунов v_1, v_2, v_3 (кругов в минуту). Тогда по условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \dfrac{1}{6} \\ v_2 - v_3 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

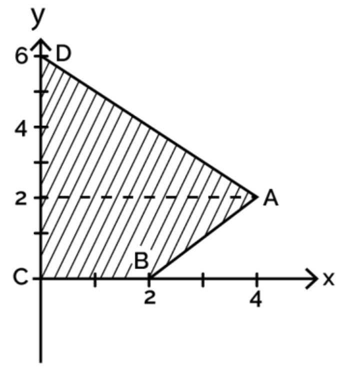
Отсюда: $v_1 - v_2 + v_2 - v_3 = v_1 - v_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

А тогда

$$\frac{1}{v_1 - v_3} = \frac{12}{5}$$

Ответ: $\frac{12}{5}$ мин

Задание №3



Так как фигура симметрична относительно x и y, то достаточно нарисовать ее и вычислить площадь в первом квадрате т.е. при $x \geq 0, y \geq 0$.

Имеем:

$$|\ |x| + |2 - |y|\ | - 2| \leq 2 <=> -2 \leq |x| + \big|2 - |y|\big| - 2 \leq 2 <=> 0\ < |x| + \big|2 - |y|\big| \leq 4$$

Поэтому при $x \geq 0, y \geq 0$ получаем:

$$0 \leq x + |y - 2| \leq 4 => \begin{matrix} \text{для } 0 \leq y \leq 2 & y \geq x - 2 \\ \text{для } y > 2 & y \leq 6 - x \end{matrix}$$

Нарисовав на плоскости в I четверти получим область, состоящую из прямоугольного треугольника и трапеции. Тогда площадь этой области равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2(4 + 2) = 8 + 6 = 14$$

Ответ: $\{56\}$

Задание №4

Обозначим $\sin x = a \quad \sin 2x = b \quad \sin 3x = c$.

Тогда:

$$\mathrm{a}^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 \leq> \mathrm{a}^3 + b^3 = (a + b + c)^3 - c^3 <=> (a + b) \cdot$$

$$\cdot \left(a^2 - ab + b^2\right) = \left((a + b + c)^2 + (a + b + c)c + c^2\right)(a + b)$$

Отсюда получим:

$$(a + b)(a + c)(b + c) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \sin 2x = 0 \\ \sin 2x + \sin 3x = 0 \\ \sin x + \sin 3x = 0 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} \sin x(1 + 2\cos x) = 0 \\ \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \sin 2x \cos x = 0 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin \frac{5x}{2} = 0 \end{array}\right. => \begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2}; x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m \\ x = \frac{2\pi n}{5} \quad x = \pi + 2\pi e \end{array}$$

Ответ: $\left\{\frac{k\pi}{2}, \frac{2\pi n}{5}, \ \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, \ \pi + 2\pi l, \ \ k, n, m, l \ \in Z \ \right\}$

Задание №5

Полагаем $x = 1$. Получаем:

$$f(-1) + 2f(0) + f(-1) = -4$$

$$f(-1) + f(0) = -2$$

Полагая $x = 0$, получим:

$$f(0) + f(0) + f(-1) = -3 \Rightarrow 2f(0) + f(-1) = -3$$

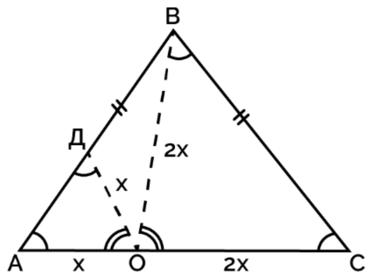
Решаем совместно систему:

$$\begin{cases} f(-1) + f(0) = -2 \\ 2f(0) + f(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(0) = -1, \;\; f(-1) = -1$$

Ответ:$x^3 - x - 1$

Задание №6

Сделаем чертеж.



Решение

Пусть $AO = x$, тогда по условию задачи OC= $2x = OB$.

Тогда ∠COB=∠AOD – как углы поворота вокруг точки O. Поэтому равнобедренные треугольники △AOD и △BOC подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $\triangle ABC$ равнобедренный и AB=BC=2AD=2BD. Отсюда$S_{BOD} = \frac{1}{2}S_{AOB}$, поскольку эти треугольники имеют общую высоту из точки O. Аналогично:

$$\frac{S \triangle ABO}{S \triangle \mathrm{ABC}} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{3}$$

Поэтому:

$$\frac{S \triangle BOD}{S \triangle \mathrm{ABC}} = \frac{S \triangle BOD}{S \triangle \mathrm{AOB}} \cdot \frac{S \triangle \mathrm{AOB}}{S \triangle \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

Ответ: $\{1:6\}$

Задание №7

Пусть $z = 4y - 3x$. Нужно найти $\min z$. Имеем при условии, что $4y = z + 3x$ подставляя в неравенство имеем:

$$z + 3x \geq 4x^2 + 1, \quad 4x^2 - 3x + 1 - z \leq 0$$

Решаем это неравенство.

Имеем:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16 + 16z}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{16z - 7}}{8}.$$

Следовательно $\min z = \frac{7}{16}$. Условие будет выполнено, если $x = \frac{3}{8}$

Ответ: $\left\{\frac{7}{16}\right\}$

Задание №8

Обозначим $y^3 - 4y = a$ получаем систему:

$$\begin{cases} a > 3x^2 - 18x + 26 \\ a < -x^2 + 8x - 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3x^2 - 18x + 26 < -x^2 + 8x - 14 \Rightarrow 4x^2 - 26x + +40 < 0 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 20 < 0$$

Решая это неравенство, находим, что $\frac{5}{2} < x < 4$. Так как x – целое число, то $x = 3$. А тогда:

$$\begin{cases} y^3 - 4y > -1 \\ y^3 - 4y < 1 \end{cases}$$

Так как y – целое число, то $-1 < y^3 - 4y < 1$.

Тогда: $y^3 - 4y = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = -2, \quad y_3 = 2$

Ответ: $\{(3,0), (3,-2), (3,2)\}$

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАВИГАТОР»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2024-2025 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям заключительного этапа
9-11 класс
Вариант 4

Задание №1

Имеем $(\sqrt{2}+1)^3 = 2\sqrt{2} + 3\cdot 2 + 3\cdot\sqrt{2} + 1 = 5\sqrt{2} + 7$. Далее

$(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow (3-2\sqrt{2})^2 = 9 + 8 - 12\sqrt{2} = 17 - 12\sqrt{2}$

Поэтому имеем:

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$$

Ответ: $\{1\}$

Задание №2

Пусть скорости бегунов v_1, v_2, v_3 (кругов в минуту). Тогда по условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \dfrac{1}{9} \\ v_2 - v_3 = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Отсюда: $v_1 - v_2 + v_2 - v_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$.

А тогда

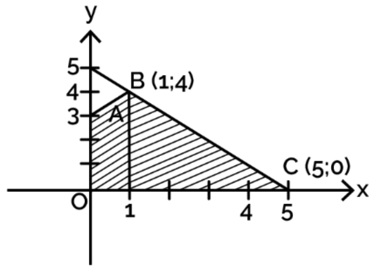
$$\frac{1}{v_1 - v_3} = \frac{18}{5} = 3{,}6$$

Ответ: 3,6 мин

Задание №3

Фигура симметрична относительно Оx и Оy. Поэтому достаточно нарисовать часть ее фигуры в первой четверти и найти ее площадь. Для $x \geq 0, y \geq 0$.
Имеем:

$$(y + |1-x| - 1)^2 \leq 9 =>$$
$$|y + |1-x| - 1| \leq 3 =>$$
$$-3 \leq y - 1 + |1-x| \leq 3 =>$$
$$-2 \leq y + |1-x| \leq 4$$



При $x \geq 1$ имеем

$$-2 \leq y + |x-1| \leq 4 =>$$
$$-1 \leq y + x \leq 5$$

при $x < 1$ получаем:

$$-2 \leq y + 1 - x \leq 4 => \ -3 \leq y - x \leq 3$$

Нарисовав соответствующие области, получим фигуру OABC. Она состоит из трапеции и прямоугольного треугольника. Их площади равны:

$$\frac{1}{2} \cdot 1(4+3) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 11{,}5$$

Тогда площадь всей фигуры равна 46

Ответ: $\{46\}$

Задание №4

Пусть $\operatorname{tg} x = a \quad \operatorname{tg} 2x = b \quad \operatorname{tg} 3x = c$.

Тогда:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 \leq> a^3 + b^3 = (a+b+c)^3 - c^3 <=> (a+b)$$
$$(\,(a+b+c)^2 - c(a+b+c) + c^2) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Далее преобразовав, получим:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0 \\ \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0 \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0 \\ \sin 5x = 0 \\ \sin 4x = 0 \end{array}\right. => \quad \text{по ОДЗ}$$

$$\cos 3x \neq 0, \quad \cos 2x \neq 0, \quad \cos x \neq 0$$

Так как $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 4\sin x \cos x \cos 2x$, то подходит лишь $\sin x = 0$ и так как $\sin x = 0$ есть подмножество решений $\sin 3x = 0$, то

Ответ: $\left\{\frac{m\pi}{3}, \frac{\pi n}{5}, \quad n, m \in Z \right\}$

Задание №5

Полагаем в уравнении $x = 0$.

Тогда:

$$f(1) = f(0) + 3 = 4$$

$$f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 + 3$$
$$f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 + 3$$
$$f(4) = f(3) + 2 \cdot 3 + 3$$

…………………………………

$$f(2000) = f(1999) + 2(1999) + 3$$

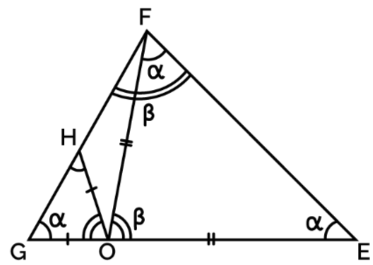
$$f(2001) = f(2000) + 2 \cdot 2000 + 3$$

Складывая левые части и правые части этих соотношений, мы получим:

$$f(2001) = 2(1 + 2 + 3 + \cdots 2000) + 3 \cdot 2000 + 4 = 2 \cdot \frac{1 + 2000}{2} \cdot 2000 + 3 \cdot 2000 + 4 =$$
$$= 2001 \cdot 2000 + 3 \cdot 2000 + 4 = 2000 \cdot 2004 + 4 = 4008004$$

Ответ: 4008004

Задание №6



По условию задачи OH=OG, OF=OE $\angle$GOH=$\angle$FOE=arccos $(\frac{1}{3})$

В равнобедренных $\triangle$ HOG и $\triangle$ EOF углы обозначим $\angle$G=$\angle$OHG=$\angle$OFE=α; угол поворота обозначим β. Тогда из треугольника OFE следует, что

$\alpha = 90° - \frac{\beta}{2} = \angle$E. Поэтому из $\triangle$ FEO по теореме синусов имеем:

$$\frac{FE}{sin\beta} = \frac{EO}{sin a}; \ \frac{FE}{sin\beta} = \frac{FE}{\sin(90 - \frac{\beta}{2})} = \frac{EO}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

Отсюда получаем, что $FE = 2EO \sin\frac{\beta}{2}$. Из треугольника FEQ

имеем EG=2FEsin$\frac{\beta}{2}$=4$EO sin^2\frac{\beta}{2}$=2EO(1-cos$\beta) = \frac{4}{3}EO$

А тогда

$$\frac{EO}{OG} = \frac{EO}{EG - EO} = 3:1$$

Ответ: $\{3:1\}$

Задание №7

Обозначим $3y - 2x = z$, поэтому $3y = 2x + z$. Поэтому

$$2x + z \geq x^2 + 6 => x^2 - 2x + 6 - z \leq 0$$

Из этого следует,

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - 6 + z} = 1 \pm \sqrt{z - 5}$$

Значит:

$$z \geq 5 => \min z = 5$$

Это значение z достигается, если

$$x = 1, y = \frac{7}{3}$$

Ответ: $\{5\}$

Задание №8

Имеем:

$$\begin{cases} x^3 - x > 3y^2 - 18y + 26 \\ x^3 - x < -y^2 + 8y - 14 \end{cases} =>$$

$$3y^2 - 18y + 26 < -y^2 + 8y - 14 => 4y^2 - 26y + +40 < 0 => 2y^2 - 13y + 20 < 0$$

Из этого следует, что

$$y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{4} = \left(\frac{5}{2}, 4\right)$$

Поэтому:

$$2{,}5 < y < 4$$

но y - целое число, поэтому $y = 3$. Подставляя в систему $y = 3$,
Получаем:

$$\begin{cases} x^3 - x > 27 - 54 + 26 = -1 \\ x^3 - x < -9 + 24 - 14 = 1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$-1 < x^3 - x < 1$$

Но тогда это возможно лишь при

$$x^3 - x = 0 => x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$$

Ответ: $\{(0,3), (-1,3), (1,3)\}$